Version: Romanian

A 45-a Olimpiadă Internaţională de Matematică

A doua zi

Marţi, 13 Iulie, 2004

Problema 4. Fie $n \geq 3$ un număr întreg şi fie $t_1, t_2, \ldots, t_n$ numere reale strict pozitive astfel încât

$$n^2 + 1 > (t_1 + t_2 + \cdots + t_n)\left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \cdots + \frac{1}{t_n}\right).$$

Arătaţi că pentru orice i, j, k, $1 \leq i < j < k \leq n$, numerele t_i, t_j, t_k sunt lungimile laturilor unui triunghi.

Problema 5. Într-un patrulater convex $ABCD$ diagonala BD nu este bisectoarea nici unuia dintre unghiurile ABC şi CDA. Punctul P se găseşte în interiorul patrulaterului $ABCD$ şi satisface

$$\angle PBC = \angle DBA \quad \text{şi} \quad \angle PDC = \angle BDA.$$

Demonstraţi că $ABCD$ este inscriptibil dacă şi numai dacă $AP = CP$.

Problema 6. Un număr natural nenul se numeşte *alternant* dacă în scrierea sa zecimală orice două cifre consecutive au parităţi diferite.

Determinaţi toate numerele naturale nenule n care au un multiplu alternant.

Timp de lucru: 4 ore 30 minute
Fiecare problemă se notează cu 7 puncte